Задача 1. (*Описание открытых подмножеств* $\mathbb{R}$)

а) Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ можно представить как объединение интервалов.

б) Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением непересекающихся интервалов и лучей.

Задача 2. (*Принцип вложенных шаров*)

а) Докажите, что метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку.

б)* Докажите, что стремление радиусов к нулю существенно, то есть существует полное пространство и последовательность вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.

(Подсказка: Можно построить соответствующую метрику на счётном множестве)

Задача 3. Докажите, что подмножество компакта компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

Задача 4. (*Описание компактов в* $\mathbb{R}^n$)

а) Докажите, что единичный куб в $\mathbb{R}^n$ является компактом.

б) Докажите, что подмножество $\mathbb{R}^n$ является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Задача 5*. Приведите пример замкнутого ограниченного множества в $C[0,1]$, не являющегося компактом.

Определение 1. Рассмотрим семейство множеств $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, каждое из которых является объединением непересекающихся отрезков:

- $K_1 = [a, b]$.
- Если $K_i = \bigcup\limits_j [a_{ij}, b_{ij}]$, то $K_{i+1} = \bigcup\limits_j \big([a_{ij}, \frac{2}{3}a_{ij} + \frac{1}{3}b_{ij}] \cup [\frac{1}{3}a_{ij} + \frac{2}{3}b_{ij}, b_{ij}]\big)$.

Положим $K[a,b] = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} K_i$. Полученное множество называется *множеством Кантора* (на отрезке $[a,b]$).

Задача 6.

а) Докажите, что множество Кантора замкнуто.

б) Докажите, что множество Кантора континуально.

в) Найдите рациональное число, принадлежащее $K[0,1]$, знаменатель которого не является степенью тройки.

Задача 7. (*Кривая Пеано*) Положим $I = [0,1]$. Рассмотрим последовательность отображений $f_n\colon I \to I^2$.

Первая функция строится как диагональ квадрата: $f_1(t) = (t,t)$.

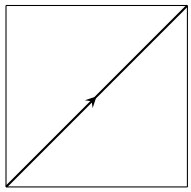
Для построения второй функции необходимо разделить квадрат на девять маленьких квадратиков и обойти их диагонали в указанном порядке.

Для построения f_3 возьмём f_2 и проход по каждой диагонали заменим на проход по такой же «букве Ф» (соответствующим образом уменьшенной и повёрнутой).

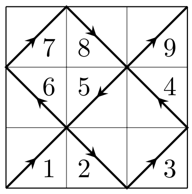
И так далее.

Движение по всем ломаным происходит с постоянной скоростью.

f_1:



f_2:



а) Докажите, что последовательность (f_n) имеет предел в пространстве непрерывных отображений из I в I^2. Обозначим этот предел через f.

(Подсказка: Упомянутое пространство полное)

б) Докажите, что для любого $x \in I^2$ и для любого $\varepsilon > 0$ пересечение $U_\varepsilon(x) \cap f_n(I)$ не пусто при $n \gg 0$.

в) Докажите, что для любой точки $x \in I^2$ и для любого $\varepsilon > 0$ пересечение $U_\varepsilon(x) \cap f(I)$ не пусто.

г) Докажите, что $f(I) = I^2$. **д)** Вычислите $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

1 а	1 б	2 а	2 б	3	4 а	4 б	5	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д